Corrigé TD5 Exercice 4

Ok. C'est parti.

On a deux ensembles, la base canonique $E = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ et l'ensemble $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, e_1\} = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,0,0)\}$.

1) Tout d'abord il faut vérifier que B est un base de $\mathbb{R}^3$. FACILE. On a trois vecteurs, donc il faut juste vérifier que B est une famille libre: on doit voir que le système $\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma e_1 = 0$, c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

a une solution unique avec $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Gauss-Jordan est notre meilleur ami. Si on peut transformer la matrice du système en la matrice identité, on aura gagné.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)L_3]{L_1-L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2+L_3]{L_1-2L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, B est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

3)(Oui, on va faire le 3 parce que c'est plus facile en cet ordre). Maintenant une fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ nous est donnée, en sachant que $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $f(e_1) = e_1 + e_2$. Il faut calculer la matrice de f dans la base B.

Rappelons que pour trouver une telle matrice $\mathcal{M}_B(f)$ il faut trouver les images des éléments de B exprimés dans la base B, c'est-à-dire:

$$\mathcal{M}_B(f) = \left(\; [f(\varepsilon_1)]_B \;\middle|\; [f(\varepsilon_2)]_B \;\middle|\; [f(e_1)]_B \; \right)$$

$$= \left(\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B \middle| \left[f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B \middle| \left[f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_B \right)$$

Les deux premières colonnes sont données dans la définition de f:

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad , \quad f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

Pour la troisième colonnes, il faut trouver l'expression de l'image en termes de la base B:

$$f(e_1) = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2 + \gamma e_1$$

Par conséquent, on doit résoudre le système:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Gauss-Jordan revient à l'attaque:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)L_3]{L_1 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 + L_3]{L_1 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Cela signifie que

$$f(e_1) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

Alors, la réponse est

$$\mathcal{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Maintenant il faut trouver la matrice de f dans la base canonique, c'est-à-dire, $\mathcal{M}_E(f)$. Pour faire ça on va utiliser la matrice de passage de B à E, dénotée par $\mathcal{M}_{B\to E}(Id)$, et de E à B, dénotée par $\mathcal{M}_{E\to B}(Id)$. Rappelons que ces matrices sont inverses l'une de l'autre.

Pour trouver $\mathcal{M}_{B\to E}(Id)$ il faut exprimer les éléments de B en fonction des éléments de E, qui est immédiat puisque E est la base canonique:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ e_1 = e_1 \end{cases}$$

Chaque équation nous donne une colonne de la matrice de passage, qui est

$$\mathcal{M}_{B\to E}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $\mathcal{M}_{E\to B}(Id)$ comme l'inverse de cette matrice avec... SURPRISE, Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(-1)L_3]{L_1-L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2+L_3]{L_1-2L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$\mathcal{M}_{E\to B}(Id) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Maintenant on peut calculer $\mathcal{M}_E(f)$:

$$\mathcal{M}_E(f) = \mathcal{M}_{B\to E}(Id)\mathcal{M}_B(f)\mathcal{M}_{E\to B}(Id)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$