Corrigé TD7 Exercice 1

On fera la deuxième et la cinquième matrice
2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice carrée de dimension 3. La première chose qu'il faut faire c'est trouver ses trois valeurs propres associés, λ_1, λ_2 et λ_3. Alors, il faut résoudre l'équation $|A - \lambda I| = 0$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(-\lambda(1-\lambda)-2) + (1-\lambda) + 2 - 2 + 2\lambda \\
&= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) - 2(2-\lambda) + 1 - 3\lambda \\
&= (-\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 4 + 2\lambda + 1 + \lambda \\
&= -2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + 3\lambda \\
&= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3
\end{aligned}$$

Donc, on doit factoriser le polynôme $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3$. Commençons par trouver on solution évidente. On peut vérifier que

$$P(1) = -1 + 3 + 1 - 3 = 0.$$

Par conséquent, 1 est une racine de $P(\lambda)$ et on peut écrire $P(\lambda) = (\lambda - 1)Q(\lambda)$. On trouve $Q(\lambda)$ en divisant:

$$\begin{array}{rr|l}
- & -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 & \lambda - 1 \\ \cline{3-3}
 & -\lambda^3 + \lambda^2 & -\lambda^2 + 2\lambda + 3 \\ \cline{1-2}
 & - \quad 2\lambda^2 + \lambda - 3 & \\
 & \quad\;\; 2\lambda^2 - 2\lambda & \\ \cline{1-2}
 & - \quad 3\lambda - 3 & \\
 & \quad\;\; 3\lambda - 3 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, $P(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 3)$.

Maintenant on factorise $-\lambda^2 + 2\lambda + 3$, en appliquant la formule pour trouver les deux racines des polynômes du deuxième dégrée.

$$\frac{-2+\sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2+4}{-2} = -1$$
$$\frac{-2-\sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2-4}{-2} = 3$$

Par conséquent on a la factorisation $P(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$ et les valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$.

Le suivant pas à faire est de trouver les vecteurs propres associés a chacune des valeurs propres. Ainsi, il faudra résoudre les trois systèmes $(A - \lambda_i I)\underline{x} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

- Pour $\lambda_1 = 1$ on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec Gauss-Jordan...

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2-L_1]{L_3-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2:(-2)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[L_1-L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous ramène au système

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

La solution paramétrée est

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Les vecteurs appartenant a la base qui engendre le espace de solutions est sont les vecteurs propres associés à λ_1. Du coup, on a le vecteur propre $v_1 = (1, 1, 0)$.

- Pour $\lambda_2 = -1$ on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec Gauss-Jordan...

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 - 3L_1]{L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2:(-4)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 - L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous ramène au système

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

La solution paramétrée est

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Les vecteurs appartenant a la base qui engendre le espace de solutions est sont les vecteurs propres associés à λ_2. Du coup, on a le vecteur propre $v_2 = (0, 1, 1)$.

- Pour $\lambda_3 = 3$ on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec Gauss-Jordan...

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 + L - 1]{L_3 + 2L_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_2]{} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2:(-4)]{} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_1+L_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous ramène au système

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

La solution paramétrée est

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

Les vecteurs appartenant a la base qui engendre le espace de solutions est sont les vecteurs propres associés à λ_3. Du coup, on a le vecteur propre $v_3 = (1, 0, 1)$.

La matrice du passage pour la diagonalisation est

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonalisation vient donnée par l'équation $D = P^{-1}AP$, où les valeurs de la diagonal de D seront précisément les valeurs propres de A. Vérifions cela.

On peut calculer P^{-1} avec la formule (Matrice de mineurs de P transposé)/$|P|$ ou avec Gauss-Jordan. Transposer est changer les lignes par colonnes. Avec la formule on obtient:

$$P^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -11 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

5)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculons le valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4. On développe par la première colonne de la matrice:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1-\lambda & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 7 & -15 \\ 0 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -1 & 7 & -14 \\ 0 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = [(3-\lambda)(-1-\lambda)+4] \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+4)[-(3-\lambda)(3+\lambda)+8)] \\ &= (\lambda^2-2\lambda^2+1)[-(9-\lambda^2)+8] \\ &= (\lambda^2-2\lambda^2+1)(\lambda^2-1) = P(\lambda) \end{aligned}$$

$\lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$ car $(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)$ et $\lambda^2 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda-1)^2$ car $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Donc,

$$P(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+1)$$

et le valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = -1$.

La valeur 1 a multiplicité algébrique 3. Par conséquent, pour que la matrice soit diagonalisable, il faut que la dimension de l'espace de solutions de l'équation $(A-I)\underline{x} = 0$ soit 3. Voyons si c'est le cas:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -2 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec Gauss-Jordan...

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -2 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4-L_3]{L_2-L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & -14 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{L_3:2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2-L_1]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2-7L_3]{} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1+L_2]{L_3+2L_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela nous ramène au système

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

La solution paramétrée est

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

L'espace de solutions est engendré par le vecteur $v_1 = (2, 1, 0, 0)$. Donc la dimension de l'espace de solutions est 1 (on dit que la dimension géométrique de la valeur 1 est 1). Comme la dimension géométrique de 1 n'équivaut pas à sa dimension algébrique, la matrice A n'est pas diagonalisable.